Lassen sich Quantenzustände als Ensembles streufreier Zustände darstellen? II

W. OCHS

Sektion Physik der Universität München

(Z. Naturforsch. **26 a**, 204—214 [1971]; eingegangen am 22. Oktober 1970)

Can quantum-states be considered as ensembles of dispersionfree states? II

In part I of this paper we constructed a model representing quantum states by ensembles of dispersionsfree states. In part II we study further properties of this model and analyse their logical relations. It is also shown that the main results do not depend on the assumption that each self-adjoint operator corresponds to an observable.

1. Einleitung

Im ersten Teil dieser Arbeit[1] haben wir folgendes Problem behandelt: Lassen sich Quantenzustände durch Gibbsche Ensembles streufreier Mikrozustände darstellen, wenn wir in Anlehnung an die *Differentialraum-Quantentheorie* (= DRQ)[2–4] verlangen, daß ein Mikrozustand durch die objektiven Werte aller Observablen eindeutig charakterisiert ist?

Dabei ergab sich zunächst, daß eine „DRQ-ähnliche" ensembletheoretische Formulierung der Quantentheorie (im folgenden mit EQT bezeichnet) nur möglich ist, wenn die Konzeption der Observablen und Quantenzustände geändert wird. Nach der Entwicklung einer modifizierten Observablenkonzeption haben wir dann alle mathematischen Forderungen an die Ensemblekonstruktion, die aus den physikalischen Vorstellungen der EQT folgen, in zwei Axiomen zusammengefaßt:

Axiom (1). Zu jedem komplexen, separablen Hilbert-Raum **H** existiert ein Meßraum $(\Omega, \mathscr{L})$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) Jedem Paar A^α, bestehend aus einem selbstadjungierten Operator A aus **H** mit diskretem Spektrum und einer A-feineren Zerlegung der Einheit α, ist eine surjektive, $\mathscr{L}$-meßbare Abbildung ${}^0A^\alpha$: $\Omega \mapsto \mathbf{a}$ von Ω auf das Spektrum von A zugeordnet[5].

(b) Für alle stückweise stetigen Funktionen f auf $\mathbf{R}$ gilt
$$f({}^0A^\alpha) = {}^0f(A)^\alpha .$$

(c) Jedem Paar W^ε, bestehend aus einem Spuroperator[5] W aus **H** und einer W-feineren ZdE ε, ist eine Wahrscheinlichkeit μ_W^ε auf $(\Omega, \mathscr{L})$ zugeordnet.

(d) Zu zwei verschiedenen Punkten $x, y \in \Omega$ existiert mindestens eine Observable A^α mit der Eigenschaft ${}^0A^\alpha(x) \neq {}^0A^\alpha(y)$.

Axiom (2). Für alle Observablen und Makrozustände gilt die Beziehung
$$\int_\Omega {}^0A^\alpha \, d\mu_W^\varepsilon = \mathrm{Sp}(A\,W) .$$

Durch Konstruktion eines mathematischen Gebildes[6], in dem diese Axiome gelten, haben wir die Möglichkeit einer Darstellung von Quantenzuständen durch Ensembles von Mikrozuständen (ohne absolut verborgene Parameter) nachgewiesen.

Im vorliegenden zweiten Teil der Arbeit wollen wir das in I entwickelte EQT-Modell näher analysieren. Zunächst betrachten wir weitere Eigenschaften des Modells, die über die im Axiomensystem enthaltenen definierenden Merkmale hinausgehen. Danach analysieren wir die logische Abhängigkeit der Modelleigenschaften voneinander. Zum Schluß

Sonderdruckanforderungen an Dr. W. OCHS, Sektion Physik, Lehrstuhl Prof. SÜSSMANN, *D-8000 München 13*, Schellingstr. 2—8.

1 W. OCHS, Z. Naturforsch. **25**, 1546 [1970], im folgenden als I zitiert.

2 N. WIENER u. A. SIEGEL, Nuov. Cim. Suppl. **2**, Ser. X, 982 [1955].

3 A. SIEGEL, The Differential-Space Theory of Quantum Systems, in: Differential-Space, Quantum Systems and Prediction, ed. by N. WIENER, Cambridge (Mass.) 1966.

4 W. OCHS, Helv. Phys. Acta **43**, 668 [1970].

5 In Anlehnung an ihre physikalische Interpretation bezeichnen wir die Paare A^α und W^ε als *Observable* bzw. *Makrozustände*; eine Observable P^α mit $P^2 = P$ nennen wir *Zustandseigenschaft*. „Zerlegung der Einheit" kürzen wir im folgenden mit ZdE ab; eine ZdE $1 = \sum_i Q_i$ heißt *A-feiner*, wenn jeder der Projektionsoperatoren Q_i in einem Projektionsoperator der Spektraldarstellung von A enthalten ist. Einen positiv semidefiniten, selbstadjungierten Operator W mit $\mathrm{Sp}(W) = 1$ bezeichnen wir als *Spuroperator*.

6 Dieses Gebilde wird im Anhang, zu Beginn des Beweises von Satz 3, nochmals kurz skizziert.

untersuchen wir noch die Frage, inwieweit die Überlegungen dieser Arbeit von der Voraussetzung abhängen, daß jedem selbstadjungierten Operator mit diskretem Spektrum eine Observable entspricht.

2. Eigenschaften des EQT-Modells aus I

Bevor wir spezifische Eigenschaften unseres Modells betrachten, wollen wir uns überlegen, ob aus dem Axiomensystem der Einleitung weitere (über Axiom (1b) hinausgehende) Observablenrelationen folgen, die im ganzen Zustandsraum oder wenigstens in einzelnen Ensembles gelten.

Lemma 1. Aus den Axiomen (1) und (2) folgen die äquivalenten Beziehungen[7]

$$P\,W = 0 \Rightarrow (\forall\, Q)\,(\tilde{\forall}\,\alpha, \beta, \varepsilon)\,\mu_W^\varepsilon\{{}^0P^\alpha\,{}^0Q^\beta = 0\} = 1\,, \tag{2.1}$$

$$V \leqq Q \Rightarrow (\forall\, P)\,(\tilde{\forall}\,\alpha, \beta, \gamma)\,\mu_V^\gamma\{{}^0P^\alpha \leqq {}^0Q^\beta\} = 1\,. \tag{2.2}$$

Zusätzlich zu der im ganzen Zustandsraum gültigen Beziehung $f({}^0A^\alpha) = {}^0f(A)^\alpha$ sind also in jedem Ensemble (fast überall) weitere Observablenrelationen erfüllt. Diese „ensemblespezifischen" Relationen werden durch das Ensemblemaß μ_W^ε erzwungen, indem es der Menge aller Mikrozustände mit abweichender Observablenstruktur das μ_W^ε-Maß Null zuordnet. Allerdings zeigt der folgende Satz, daß diese Observablenrelationen jeweils auf bestimmte (von den betreffenden Observablen abhängige) Ensembles beschränkt bleiben; sie lassen sich nicht einmal für alle Paare P^α, Q^β von Zustandseigenschaften mit der entsprechenden Operatorbeziehung $PQ = 0$ oder $P \leqq Q$ auf ein (gemeinsames) Ensemble ausdehnen — geschweige denn auf den ganzen Zustandsraum.

Satz 1#. Im Fall dim $\mathbf{H} \geqq 3$ stehen die äquivalenten Eigenschaften

(E1) $(\exists\, U^\delta)\,(\forall\, P, Q)$
$$[P \leqq Q \Rightarrow (\tilde{\forall}\,\alpha, \beta)\,\mu_U^\delta\{{}^0P^\alpha \leqq {}^0Q^\beta\} = 1]\,,$$

(E1′) $(\exists\, U^\delta)\,(\forall\, P, Q)$
$$[P\,Q = 0 \Rightarrow (\tilde{\forall}\,\alpha, \beta)\,\mu_U^\delta\{{}^0P^\alpha\,{}^0Q^\beta = 0\} = 1$$

in Widerspruch zu Axiom (1).[8]

[7] $\forall$ bedeutet *für alle* ...; $(\tilde{\forall}\alpha)\,[\ldots P^\alpha \ldots]$ bedeutet *für alle P-feineren* ZdEα. Alle Beweise finden sich im Anhang.

[8] Dieser Satz ist eine leichte Verallgemeinerung des Satzes von BELL[9], der auch Satz 1 aus I zugrunde liegt. Die Verallgemeinerung besteht darin, daß bestimmte Observablenrelationen nicht mehr für ganz Ω sondern nur noch für fast alle x bezüglich mindestens eines Maßes vorausgesetzt werden. Die Bezeichnung (1#) soll darauf hinweisen, daß Satz 1# das Analogon zu Satz 1 im Rahmen der modifizierten Observablenkonzeption darstellt.

Korollar: Zu jedem Makrozustand W^ε existiert mindestens ein Paar orthogonaler Projektionsoperatoren P, Q mit der Eigenschaft

$$\mu_W^\varepsilon\{{}^0P^\alpha = {}^0Q^\beta = 1\} > 0 \tag{2.3}$$

für geeignete α, β.

In einem Kollektiv gleichpräparierter physikalischer Systeme befindet sich also zu jedem Paar von Zustandseigenschaften ein im allgemeinen positiver Anteil von Systemen in Mikrozuständen mit der Eigenschaft ${}^0P^\alpha = {}^0Q^\beta = 1$, auch wenn sich diese Zustandseigenschaften im Rahmen der Quantenmechanik gegenseitig ausschließen.

Über diese Ergebnisse hinaus — die als Konsequenzen aus dem Axiomensystem ja für jede EQT zutreffen — gelten in unserem Modell die stärkeren Eigenschaften

(E2)
$$(\forall\, U^\delta)\,(\forall\, P_1, \ldots, P_n \quad \text{mit} \quad \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Sp}(P_i\, U) \neq 0)$$
$$(\tilde{\forall}\,\alpha_1, \ldots, \alpha_n \quad \text{mit} \quad i \neq j \Leftrightarrow \alpha_i \neq \alpha_j)$$
$$0 < \mu_U^\delta\{{}^0P_1^{\alpha_1} = \cdots = {}^0P_n^{\alpha_n} = 1\} \leqq 1$$

und

(E3) *Jede Abbildung* x: $\Lambda \mapsto \mathsf{N}$ *mit der Einschränkung* $x(\alpha) \in K_\alpha$ *ist Element von* Ω.[10]

Eigenschaft (E3) besagt, daß alle mit Axiom (1c) verträglichen Kombinationen von Observablenwerten auch wirklich als Mikrozustände im Zustandsraum unseres Modells auftreten. Eigenschaft (E2) weist auf einen großen Unterschied und zugleich auf eine charakteristische Analogie zwischen Quantenmechanik und EQT hin. Im Rahmen der Quantenmechanik sind in jedem Quantenzustand unendlich viele andere (sich ausschließende wie unverträgliche) Quantenzustände überlagert oder „potentiell enthalten"; je nach der „experimentellen Fragestellung" treten andere Gruppen der vorher nur potentiell vorhandenen Zustände in Erscheinung. In der EQT dagegen entspricht jedem Quantenzustand ein ganzes Ensemble von Mikrozuständen, und in jedem Mikrozustand sind die Werte aller Observablen eindeutig festgelegt. Die EQT kennt weder eine Überlagerung verschiedener

[9] J. S. BELL, Rev. Mod. Phys. **38**, 447 [1966].

[10] Λ bedeutet die Menge aller ZdE von $\mathbf{H}$; K_α bedeutet die Indexmenge der ZdEα, $1 = \sum_{i \in K_\alpha} Q_i$; sie ist entweder gleich $\{1, \ldots, N\}$ oder gleich $\{1, 2, \ldots\} = \mathsf{N}$.

Zustände noch einen Übergang von „potentiellen" zu „realen" Zuständen; eine experimentelle Fragestellung wirkt im Idealfall lediglich als Filter [4,11,12]. Aber — und hierin liegt die Analogie — jede endliche Kombination von Observablenwerten, die in einem bestimmten Quantenzustand nach Axiom (2) und Axiom (1b) möglich ist, tritt ebenfalls in dem entsprechenden EQT-Ensemble in einer (von der Wertekombination abhängigen) Menge von Mikrozuständen von positivem Maß auf. Die EQT erkauft also die vollständige Charakterisierung der Mikrozustände durch eine deutliche Schwächung ihrer Observablenstruktur. Wie das Korlorar zu Satz 1# zeigt, läßt sich eine Änderung der Observablenkonzeption — mit einer entsprechenden Abschwächung der Observablenstruktur — in der EQT auch nicht vermeiden; denn Gl. (2.3) verträgt sich nur dann mit den experimentell prüfbaren und als gültig vorausgesetzten Aussagen der Quantenmechanik (wonach bei $PQ = 0$ nie gleichzeitig $P = Q = 1$ gemessen wird), wenn wir den Observablenbegriff so modifizieren, daß zwei Zustandseigenschaften mit orthogonalen Projektionsoperatoren nicht notwendig verträglich sind.

Nach dieser Erörterung der Observablenstruktur der Mikrozustände betrachten wir im folgenden noch einige Merkmale der Wahrscheinlichkeitsfelder ($\mathscr{L}$, μ_W^ε). Wie in Satz 3 gezeigt wird, gilt in unserem Modell die Eigenschaft

(E4) *Ist $\mathscr{R}$ die Klasse aller Mengen der From*

$$M_P^\alpha = \{{}^0P^\alpha = 1\}$$

und $\mathscr{B}$ die von $\mathscr{R}$ erzeugte Boolsche Algebra, so existiert zu jedem Element $M \in \mathscr{B}$, $M \neq \emptyset$ ein Makrozustand W^ε mit der Eigenschaft $\mu_W^\varepsilon(M) > 0$.

(E4) bedeutet, daß alle durch endlich viele Zustandseigenschaften definierten Mengen von Mikrozuständen auch real vorkommen, insofern sie bei mindestens einer Präparation mit positiver Wahrscheinlichkeit auftreten.

Bekanntlich existiert in der Quantenmechanik eine Klasse von extrem unscharfen Makrozuständen $\hat{W}$, die jeder (von Null verschiedenen) Zustandseigenschaft einen positiven Erwartungswert zuordnen:

$$(\forall P \neq 0) \;\; \mathrm{Sp}(\hat{W} P) > 0 \,.$$

Unser Modell besitzt nun in Analogie zur statistischen Mechanik die stärkere Eigenschaft

(E5) *Ist M eine beliebige Menge aus $\mathscr{B}$ mit der Eigenschaft $(\exists\, U^\delta)\, \mu_U^\delta(M) > 0$, so gilt*

$$(\forall\, \hat{W})\, (\tilde{\forall}\, \varepsilon)\, \mu_{\hat{W}}^\varepsilon(M) > 0 \,.$$

Die Maße $\mu_{\hat{W}}^\varepsilon$ repräsentieren demnach eine so geringe Information über das System (bzw. eine so „neutrale" Präparation), daß über die experimentell definierbaren Mengen hinaus alle im Rahmen der EQT physikalisch sinnvollen Mengen von Mikrozuständen mit positiver Wahrscheinlichkeit zu erwarten sind.

Lemma 2. Unter der Voraussetzung von Axiom (1) gelten die Beziehungen

$$(E2) \Rightarrow \neg\,(E1)\,, \tag{2.4}$$

$$(E2) \Rightarrow \quad (E4)\,, \tag{2.5}$$

$$(E2) \Rightarrow \quad (E5)\,. \tag{2.6}$$

Im Verhältnis der Klassen $\mathscr{R}$ und $\mathscr{B}$ zeigt sich ein charakteristischer Unterschied zwischen EQT und statistischer Mechanik. In der statistischen Mechanik bildet die Gesamtheit der als operativ definierbar angesehenen Mengen [13] eine Boolsche Mengenalgebra $\mathscr{B}'$ im Γ-Raum; sie ist damit gegen alle operativ interpretierbaren Mengenoperationen wie Vereinigung, Durchschnitt und Komplement abgeschlossen. Diese Tatsache beruht darauf, daß in der klassischen Physik alle Zustandseigenschaften — und damit alle „mengendefinierenden" Bedingungen — verträglich sind. In der EQT — als einer Formulierung der Quantentheorie — gelten dagegen nur die Mengen aus $\mathscr{R}$ als operativ sinnvoll, und $\mathscr{R}$ ist nur gegen Komplementbildung abgeschlossen. Hier erhebt sich die interessante Frage, ob sich der Unterschied zwischen den operativ definierbaren Mengen aus $\mathscr{R}$ und den „meta-experimentellen" Mengen aus $\mathscr{B} \backslash \mathscr{R}$ auf die physikalische Bedeutung beschränkt oder ob die Elemente aus $\mathscr{R}$ auch mathematisch ausgezeichnet sind. Jeder formale Unterschied zwischen den beiden Klassen wäre zugleich ein Unterschied im „statistischen Überbau" zwischen EQT und statistischer Mechanik, wo es keine zu $\mathscr{R}$ analoge, ausgezeichnete Unterklasse von $\mathscr{B}'$ gibt.

[11] A. Siegel u. N. Wiener, Phys. Rev. **101**, 429 [1956].
[12] W. Ochs, Helv. Phys. Acta **43**, 685 [1970].

[13] Für unsere Überlegungen ist es unerheblich, welchen Umfang genau man der Gesamtheit der operativ interpretierbaren Mengen zugesteht; eine Boolsche Algebra bilden sie in jedem Fall.

Nun existiert bekanntlich zu zwei beliebigen, punktfremden Mengen ($\neq \emptyset$) aus $\mathscr{R}$ stets ein Makrozustand, der beiden Mengen unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten zuordnet. Daraus erhalten wir mit der Eigenschaft

(E6) *Zu zwei beliebigen Mengen M_1, M_2 aus $\mathscr{B}$ mit den Merkmalen $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, $(\exists U^\delta)\ \mu_U^\delta(M_1 \cup M_2) > 0$ existiert mindestens ein Makrozustand W^ε mit*

$$\mu_W^\varepsilon(M_1) \neq \mu_W^\varepsilon(M_2)$$

unmittelbar eine notwendige Bedingung für die formale Gleichwertigkeit der Elemente aus $\mathscr{B}$ und $\mathscr{R}$.

Lemma 3. Aus den Axiomen (1) und (2) und Eigenschaft (E6) folgt (E1).

Korollar. Im Falle dim $\mathbf{H} \geqq 3$ sind die Axiome (1) und (2) und Eigenschaft (E6) unverträglich.

Die formale Auszeichnung von $\mathscr{R}$ vor $\mathscr{B}$ bedeutet physikalisch, daß die Präparation von Quantenzuständen i.a. zu grob ist, um zwei schnittfreie endliche Kombinationen von Zustandseigenschaften mit unterschiedlicher Wahrscheinlichkeit erzeugen zu können.

Der folgende Satz faßt nochmals alle in dieser Arbeit enthaltenen Aussagen über unser Modell zusammen und gibt eine vollständige Übersicht der gegenseitigen Abhängigkeit bzw. Verträglichkeit der betrachteten Axiome und Eigenschaften.

Satz 3.

(a) die Axiome (1), (2) und die Eigenschaften (E2) bis (E5) sind verträglich und in dem EQT-Modell aus I realisiert.

(b) Im Falle dim $\mathbf{H} = 2$ sind die Axiome (1), (2) und *alle* Eigenschaften (E1) bis (E6) verträglich und ebenfalls in unserem EQT-Modell realisiert.

(c) Unter der Voraussetzung von Axiom (1) sind von den übrigen sieben Aussagen (i.e. Axiom (2) und die Eigenschaften (E1) bis (E6)) genau die 30 Kombinationen verträglich, die nicht bereits durch Satz 1# und die Lemmata 2 und 3 ausgeschlossen werden; dabei handelt es sich um

(c1) $2^2 = 4$ Kombinationen mit der gemeinsamen Voraussetzung

$$\neg\ (\mathrm{E}1) \wedge (\mathrm{E}2) \wedge (\mathrm{E}4) \wedge (\mathrm{E}5) \wedge \neg\ (\mathrm{E}6)\ ,$$

(c2) $2^4 = 16$ Kombinationen mit der gemeinsamen Voraussetzung

$$\neg\ (\mathrm{E}1) \wedge \neg\ (\mathrm{E}2) \wedge \neg\ (\mathrm{E}6)\ ,$$

(c3) 2 Kombinationen mit der gemeinsamen Voraussetzung

$$\neg\ \text{Axiom}\ (2) \wedge \neg\ (\mathrm{E}1) \wedge (\mathrm{E}2) \wedge (\mathrm{E}4) \wedge (\mathrm{E}5) \wedge (\mathrm{E}6)$$

und

(c4) $2^3 = 8$ Kombinationen mit der gemeinsamen Voraussetzung

$$\neg\ \text{Axiom}\ (2) \wedge \neg (\mathrm{E}1) \wedge \neg\ (\mathrm{E}2) \wedge (\mathrm{E}6)\,.$$

Damit schließen wir die Untersuchung unseres EQT-Modells ab. Bei dieser Gelegenheit möchten wir betonen, daß die in den Beweisen zu Satz 2 und 3 konstruierten Modelle lediglich die Möglichkeit bzw. Verträglichkeit gewisser Eigenschaften einer EQT aufzeigen sollten; darüber hinaus besitzen sie keine physikalische Bedeutung, zumal sie — der Problemstellung der Arbeit entstrechend — nur die zeitunabhängigen Aspekte der EQT erfassen.

3. Eine Abwandlung von Satz 1

Zum Abschluß müssen wir noch das in I, 3. aufgetretene Problem behandeln, inwieweit die Gültigkeit von Satz 1 (und im Anschluß daran die Notwendigkeit einer neuen Observablenkonzeption für die EQT) auf unzulässig starken Annahmen über die Menge der Observablen eines Systems beruht.

Um die Darstellung zu vereinfachen, haben wir in Anlehnung an die DRQ angenommen, daß jedem selbstadjungierten Operator mit diskretem Spektrum eine Observable und jedem Spuroperator ein Makrozustand entspricht. Diese Annahmen halten wir aber (auch abgesehen von Überauswahlregeln) nicht für ausreichend begründet, um daraus auf die Unmöglichkeit verborgener Parameter schließen zu können. Wir beweisen daher Satz 1 unter anderen, hinsichtlich der Observablenmenge abgeschwächten Voraussetzungen. Anstelle der Annahmen (An1) bis (An3) und (An8) aus I machen wir folgende Annahmen:

Annahmen über die Observablen physikalischer Systeme

(A1) Jedem System ist ein komplexer Hilbert-Raum $\mathbf{H}$ zugeordnet und es existiert eine bijektive Abbildung σ der Menge aller Zustandseigenschaften des Systems auf eine Menge Σ von Projektionsoperatoren aus $\mathbf{H}$; für Σ gilt

$$0, 1 \in \Sigma; \quad P \in \Sigma \Rightarrow 1 - P \in \Sigma\,,$$
$$(P, Q \in \Sigma) \wedge (P < Q) \Rightarrow Q - P \in \Sigma\,.$$

[14] $P_{\psi_1} \sqcup P_{\psi_2}$ bedeutet den Projektionsoperator zu der von ψ_1 und ψ_2 aufgespannten Ebene.

(A2) Es existiert ein System mit den Eigenschaften[14]

$(\exists\, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathbf{H},\ \langle \varphi_i \mid \varphi_j \rangle = \delta_{ij})$

$(\forall\, \psi = \sum_{i=1}^{3} c_i \varphi_i,\ c_i \in \mathsf{A}_5)$

$P_\psi := |\psi\rangle\langle\psi| \in \Sigma, \quad P_{\psi_1} + P_{\psi_2} + P_{\psi_3} \in \Sigma,$

$P_{\psi_1}, P_{\psi_2} \in \Sigma \Rightarrow P_{\psi_1} \sqcup P_{\psi_2} \in \Sigma\,.$

Hier bedeutet A_n die Menge aller rationalen Zahlen, die sich in maximal n Schritten durch die vier Verknüpfungen $+, -, \cdot, :$ aus 0 und 1 gewinnen lassen.

Annahmen über die Makrozustände physikalischer Systeme

(B1) Es existiert eine bijektive Abbildung ϑ der Menge aller Makrozustände auf eine Menge Θ von Spuroperatoren aus $\mathbf{H}$.

(B2) Für das spezielle System aus (A2) gilt

$$(Q \in \Sigma) \wedge Q \leqq P_{\psi_1} + P_{\psi_2} + P_{\psi_3} \Rightarrow (Q/\mathrm{Sp}(Q)) \in \Theta\,.$$

Annahmen über die Ensemblekonstruktion

(C1) Jedem Hilbert-Raum $\mathbf{H}$ ist ein Meßraum $(\Omega, \mathscr{L})$ zugeordnet.

(C2) Jedem Projektionsoperator $P \in \Sigma$ ist eine Menge $M_P \in \mathscr{L}$ und jedem Spuroperator $W \in \Theta$ ist eine Wahrscheinlichkeit μ_W auf $(\Omega, \mathscr{L})$ zugeordnet.

(C3) Stehen $n+1$ Elemente $P_1, \ldots, P_n, Q$ aus Σ in der Beziehung $Q = \sum_{i=1}^{n} P_i$, so gilt für die zugeordneten Mengen

$$M_Q = \bigcup_{i=1}^{n} M_{P_i}; \quad i \neq j \Leftrightarrow M_{P_i} \cap M_{P_j} = \emptyset\,.$$

Annahmen über den Erwartungswert von Zustandseigenschaften

(D) Die Funktion $\mu_W(M_P)\colon \Theta \times \Sigma \mapsto [0, 1]$ hat die Eigenschaften

$$P \geqq W \Rightarrow \mu_W(M_P) = 1\,,$$
$$[P, W] \neq 0 \Rightarrow \mu_W(M_P) < 1\,.$$

Satz 4. Die Annahmen (A) bis (D) sind unverträglich[15].

[15] Satz 4 ist eine Abwandlung eines Satzes von BELL[9]. Im Unterschied zu BELL kommen wir mit der Annahme endlich vieler geeigneter Observablen und Makrozustände aus; dafür benötigen wir noch Annahme (D) über den Erwartungswert von Zustandseigenschaften.

Die zur Diskussion stehenden Annahmen (A) und (B) sind nun im Rahmen der Quantentheorie sicher erfüllt; insbesondere treffen die Voraussetzungen (A2) und (B2) auf alle Spinsysteme mit $s > \frac{1}{2}$ zu.

Mit Hilfe entsprechend modifizierter Annahmen ($\mathrm{A}^{\#}$) bis ($\mathrm{D}^{\#}$) läßt sich auch eine analoge Verschärfung von Satz $1^{\#}$ ableiten. Damit kommen wir zu dem Ergebnis, daß die Gültigkeit der Sätze 1 und $1^{\#}$ (und damit auch die Notwendigkeit einer neuen Observablenkonzeption für die EQT) von einer physikalisch vertretbaren Abschwächung der Annahmen (An 1) und (An 5) bzw. ($\mathrm{An}\,1^{\#}$) und ($\mathrm{An}\,5^{\#}$) nicht beeinträchtigt wird.

Dieses Ergebnis läßt sich allerdings nicht auf alle Resultate dieser Arbeit ausdehnen. So hängt die Gültigkeit von (E4) wesentlich vom Umfang der gegebenen Makrozustände ab; Satz (3a) muß daher bei einer Abschwächung von Axiom (1c) unter Umständen entsprechend korrigiert werden.

Die Sätze 2 und (3b) bleiben bei jeder physikalisch sinnvollen Abschwächung der Axiome (1a) und (1d) gültig. Bei Satz (3c) kann die erste Behauptung, i.e. die Verträglichkeit der 30 Eigenschaftskombinationen, von einer Abschwächung der Axiome natürlich nicht berührt werden. Dagegen hängt die zweite Behauptung, daß nur diese 30 Kombinationen verträglich sind, von der Gültigkeit der Lemmata 2 und 3 ab.

Lemma 3 bleibt nur dann erhalten, wenn zu je zwei Zustandseigenschaften P^α, Q^β mit $PQ = 0$ stets eine ZdE existiert, die sowohl P-feiner als auch Q-feiner ist.

Bei Lemma 2 sind nur die Beziehungen (2.4) und (2.6) von einer sinnvollen Abschwächung der Axiome (1a) und (1d) unabhängig; die Aussage (2.5) dagegen hängt wieder von der Menge der Observablen und Makrozustände ab.

4. Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit untersucht die Möglichkeit einer ensembletheoretischen Reformulierung der Quantentheorie, in der sich jedes Objekt in einem streufreien Mikrozustand befindet (dessen definierende Parameter sämtlich ideal meßbar sind) und in der sich alle Quantenzustände als Gibbssche Ensembles solcher Mikrozustände auffassen lassen.

Unsere Überlegungen führten zu folgenden Ergebnissen:

a) Eine Theorie verborgener Parameter kann nur dann an ideal meßbaren, von einer Messung unabhängigen Objekteigenschaften festhalten, wenn die eineindeutige Zuordnung zwischen Observablen und Operatoren aufgegeben wird.

b) Akzeptiert man eine verallgemeinerte Observablenkonzeption, so lassen sich alle Quantenzustände als Ensembles von Mikrozuständen auffassen, die ohne prinzipiell verborgene Parameter charakterisierbar sind.

Die vorliegende Arbeit beschränkt sich allerdings auf die Untersuchung der zeitunabhängigen Aspekte einer solchen Theorie. Das Problem der zeitlichen Entwicklung der Ensembles wird in einer weiteren Arbeit untersucht.

Anhang

Beweis zu Lemma 1

Aus den Axiomen (1) und (2) und $PW = 0$ ergibt sich[16]

$$0 = \mathrm{Sp}(PW) = \mu^{\varepsilon}_{\mathrm{W}}(M^{\alpha}_{P}) \geqq \mu^{\varepsilon}_{\mathrm{W}}(M^{\alpha}_{P} \cap M^{\beta}_{Q}) \geqq 0$$

und das bedeutet

$$\mu^{\varepsilon}_{\mathrm{W}}\{x \mid {}^0P^{\alpha}\,{}^0Q^{\beta} = 0\} = 1\,.$$

Die Äquivalenz der Gln. (2.1) und (2.2) folgt unmittelbar aus den Beziehungen

$$W \leqq P \Leftrightarrow W(1-P) = 0$$

und

$${}^0P^{\alpha} \leqq {}^0Q^{\beta} \Leftrightarrow {}^0P^{\alpha}\,{}^0(1-Q)^{\beta} = 0\,.\blacksquare$$

Beweis zu Satz 1$^{\#}$

Da Satz 1$^{\#}$ eine einfache Verallgemeinerung eines Satzes von Bell[9] darstellt, können wir den wesentlichen Teil des Bellschen Beweises fast unverändert als Hilfssatz übernehmen.

Lemma A 1

Voraussetzungen: a) $\dim \mathbf{H} \geqq 3$; b) Axiom (1a), (1b) und (1c); c) Bezüglich mindestens eines Maßes μ auf $(\Omega, \mathscr{L})$ erfüllen alle Zustandseigenschaften aus $\mathbf{H}$ μ-fast überall die Beziehungen

$$P\,Q = 0 \wedge {}^0P^{\alpha}(x) = 1 \Rightarrow {}^0Q^{\beta}(x) = 0\,, \tag{1}$$

$$P_1 P_2 = 0 \wedge Q < P_1 + P_2 \wedge {}^0P^{\alpha}_1 = {}^0P^{\beta}_2 = 0 \Rightarrow {}^0Q^{\gamma} = 0. \tag{2}$$

Behauptung: Für zwei beliebige Einheitselemente φ, ψ aus $\mathbf{H}$ gilt die Beziehung

$$\mu\{x \in \Omega \mid {}^0P^{\alpha}_{\psi}(x) = 0\,,\ {}^0Q^{\beta}_{\varphi}(x) = 1\} > 0 \Rightarrow \Rightarrow \|\varphi - \psi\| > \tfrac{1}{2}\,. \tag{3}$$

Um Satz 1$^{\#}$ zu beweisen, zeigen wir zunächst die Äquivalenz von (E1) und (E1′). Sind R und S zwei beliebige Projektionsoperatoren mit $RS = 0$, so gilt $R \leqq 1 - S$ und aus (E1) folgt

$$\mu^{\delta}_{\mathrm{U}}\{{}^0R^{\alpha} \leqq {}^0(1-S)^{\beta}\} = 1\,. \tag{4}$$

[16] M^{α}_{P} bezeichnet die Menge $\{x \in \Omega \mid {}^0P^{\alpha}(x) = 1\}$; ${}^0P^{\alpha}$ ist also die charakteristische Funktion von M^{α}_{P}.

Wegen Axiom (1b) gilt

$${}^0(1-S)^{\beta} = 1 - {}^0S^{\beta} \tag{5}$$

und aus (4) und (5) ergibt sich

$$\mu^{\delta}_{\mathrm{U}}\{{}^0R^{\alpha} \cdot {}^0S^{\beta} = 0\} = 1\,.$$

Setzen wir (E1′) voraus und sind R, S zwei beliebige Projektionsoperatoren mit $R \leqq S$, so gilt $R(1-S) = 0$ und aus (E1′) ergibt sich

$$\mu^{\delta}_{\mathrm{U}}\{{}^0R^{\alpha}\,{}^0(1-S)^{\beta} = 0\} = 1\,. \tag{6}$$

Aus den Gln. (5) und (6) folgt dann

$$\mu^{\delta\prime}_{\mathrm{U}}\{{}^0R^{\alpha} \cdot \leqq {}^0S^{\beta}\} = 1\,.$$

Im nächsten Schritt weisen wir nach, daß die Beziehungen (1) und (2) aus Axiom (1b) und (E1) bzw. (E1′) folgen. Nach (E1) gilt

$$(\forall P)\,(\tilde{\forall}\alpha, \beta)\,\mu^{\delta}_{\mathrm{U}}\{{}^0P^{\alpha} = {}^0P^{\beta}\} = 1\,. \tag{7}$$

Ist γ eine beliebige ZdE mit den Elementen P_1 und P_2, so folgt aus Axiom (1b)

$${}^0P^{\gamma}_1 + {}^0P^{\gamma}_2 = {}^0(P_1 + P_2)^{\gamma} \tag{8}$$

und aus (7) und (8) erhalten wir

$$(\tilde{\forall}\alpha, \beta, \gamma)\,\mu^{\delta}_{\mathrm{U}}\{{}^0P^{\alpha} + {}^0P^{\beta}_2 = {}^0(P_1 + P_2)^{\gamma}\} = 1\,. \tag{9}$$

Aus (E1) und Gl. (9) ergibt sich dann die Beziehung (2). Beziehung (1) ist lediglich ein Spezialfall von (E1′).

Im folgenden setzen wir nun (E1), $\dim \mathbf{H} \geqq 3$ und die Axiome (1a) und (1b) voraus. Sind φ und ψ zwei beliebige Einheitselemente aus $\mathbf{H}$ mit $\|\varphi - \psi\| \leqq \frac{1}{2}$, so folgt aus Lemma A1

$$(\tilde{\forall}\alpha, \beta)\,\mu^{\delta}_{\mathrm{U}}\{{}^0P^{\alpha}_{\varphi} = 0\,,\ {}^0P^{\beta}_{\psi} = 1\} = 0\,. \tag{10a}$$

Aus Symmetriegründen gilt entsprechend

$$(\tilde{\forall}\alpha, \beta)\ \mu^{\delta}_{\mathrm{U}}\{{}^0P^{\alpha}_{\varphi} = 1,\ {}^0P^{\beta}_{\psi} = 0\} = 0 \tag{10b}$$

und aus (10a) und (10b) ergibt sich

$$(\tilde{\forall}\alpha, \beta)\,\mu^{\delta}_{\mathrm{U}}\{{}^0P^{\alpha}_{\varphi} = {}^0P^{\beta}_{\psi}\} = 1\,. \tag{11}$$

Da sich zwischen zwei beliebige Einheitselemente ξ, ζ aus $\mathbf{H}$ stets eine endliche Kette

$$\xi = \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi_{n+1} = \zeta$$

von Einheitselementen mit $\|\varphi_i - \varphi_{i+1}\| \leqq \frac{1}{2}$ legen läßt, erhalten wir aus (11)

$$(\forall P, Q \quad \text{mit} \quad \mathrm{Sp}(P) = \mathrm{Sp}(Q) = 1)\,(\tilde{\forall}\alpha, \beta)\ \mu^{\delta}_{\mathrm{U}}\{{}^0P^{\alpha} = {}^0Q^{\beta}\} = 1\,. \tag{12}$$

Ist α eine beliebige ZdE in elementare Projektionsoperatoren, $1 = \sum_{i \in K_\alpha} T_i$, so folgt aus Axiom (1 b) (siehe Lemma 2.1 in I)

$$i \neq j \Leftrightarrow {}^0T_i^\alpha \cdot {}^0T_j^\alpha = 0 , \quad 1 = \sum_{i \in K_\alpha} {}^0T_i^\alpha . \tag{13}$$

Zwischen den Gln. (12) und (13) besteht aber ein Widerspruch. ▮

Beweis zu Lemma 2

Der Beweis von Aussage (2.4) ist trivial. Wie man sich leicht überlegt, läßt sich jedes Element $M \in \mathscr{B}$, $M \neq \emptyset$ in der Form $M = \bigcup_{i=1}^{N} \bigcap_{j=1}^{n_i} M_{P_{ij}}^{\alpha_{ij}}$ schreiben mit den Nebenbedingungen

$$(\forall\, i, j)\; P_{ij} \neq 0 ; (\forall\, i)\; [j \neq k \Leftrightarrow \alpha_{ij} \neq \alpha_{ik}] .$$

Insbesondere gilt also stets

$$M \neq \emptyset \wedge M \in \mathscr{B} \Rightarrow (\exists\, M_1)\; M_1 = \bigcap_{i=1}^{n} M_{Q_i}^{\beta_i} \subset M \tag{14}$$

mit $Q_i \neq 0$ und $i \neq j \Leftrightarrow \beta_i \neq \beta_j$.

Wählen wir nun einen beliebigen extrem unscharfen Makrozustand $\hat{W}^\varepsilon$, so gilt per definitionem $\prod_{i=1}^{n} \mathrm{Sp}(\hat{W} Q_i) \neq 0$ und aus (E 2) folgt

$$\mu_{\hat{W}}^{\varepsilon}(M) \geqq \mu_{\hat{W}}^{\varepsilon}(M_1) > 0 .$$

Wegen der trivialen Beziehung

$$(\forall\, M \in \mathscr{B})\; [(\exists\, U^\delta)\; \mu_{\mathrm{U}}^{\delta}(M) > 0 \Rightarrow M \neq 0] \tag{15}$$

haben wir damit gleichzeitig die Aussagen (2.5) und (2.6) bewiesen. ▮

Beweis zu Lemma 3

Wir setzen die Axiome (1) und (2) und Eigenschaft (E 6) voraus und betrachten die Mengen $X = M_P^\alpha \cap \overline{M_P^\beta}$ und $Y = \overline{M_P^\alpha} \cap M_P^\beta$ für einen beliebigen Projektionsoperator $0 < P < 1$ und zwei beliebige P-feinere ZdE. Es gilt

$$X \cap Y = \emptyset , \quad M_P^\alpha \triangle M_P^\beta = X \cup Y$$

und

$(\forall\, \mu$ auf $(\Omega, \mathscr{L}))$

$$\mu(M_P^\alpha) = \mu(M_P^\beta) - \mu(Y) + \mu(X). \tag{16}$$

Angenommen, es gäbe einen Makrozustand U^δ mit $\mu_{\mathrm{U}}^{\delta}(X \cup Y) > 0$; dann existiert wegen $(E 6)$ auch ein Makrozustand W^ε mit der Eigenschaft

$$\mu_{\mathrm{W}}^{\varepsilon}(X) \neq \mu_{\mathrm{W}}^{\varepsilon}(Y)$$

und aus (16) folgt sofort ein Widerspruch zu Axiom (2). Unter den Voraussetzungen dieses Lemmas gibt es also keinen Makrozustand U^δ mit

$$\mu_{\mathrm{U}}^{\delta}(M_P^\alpha \triangle M_P^\beta) > 0$$

und das bedeutet

$$(\forall\, P)\; (\tilde{\forall}\, \alpha, \beta)\; (\forall\, W^\varepsilon)\; \mu_{\mathrm{W}}^{\varepsilon}\{{}^0P^\alpha = {}^0P^\beta\} = 1 . \tag{17}$$

Sind nun P, Q zwei Projektionsoperatoren mit $PQ = 0$ und ist σ eine beliebige P- und Q-feinere ZdE, so ergibt sich aus Axiom (1 b) (siehe Lemma 2.1 aus I)

$$M_P^\sigma \cap M_Q^\sigma = \emptyset . \tag{18}$$

Aus der Identität $M \subset N \cup (M \triangle N)$ folgt dann

$$\begin{aligned} & M_P^\alpha \cap M_Q^\beta \\ & \subseteqq [M_P^\sigma \cup (M_P^\sigma \triangle M_P^\alpha)] \cap [M_Q^\sigma \cup (M_Q^\sigma \triangle M_Q^\beta)] \\ & = (M_P^\sigma \cap M_Q^\sigma) \cup [M_P^\sigma \cap (M_Q^\sigma \triangle M_Q^\beta)] \cup \\ & [M_Q^\sigma \cap (M_P^\sigma \triangle M_P^\alpha)] \cup [(M_Q^\sigma \triangle M_Q^\beta) \cap (M_P^\sigma \triangle M_P^\alpha)] . \end{aligned} \tag{19}$$

Die rechte Seite von Gl. (19) stellt nun nach den Gln. (17) und (18) eine Vereinigung von Nullmengen dar; folglich erhalten wir

$$\begin{aligned} & (\forall\, P, Q)\; [P\, Q = 0 \\ & \quad \Rightarrow (\forall\, W^\varepsilon)\; (\tilde{\forall}\, \alpha, \beta)\; \mu_{\mathrm{W}}^{\varepsilon}\{{}^0P^\alpha\, {}^0Q^\beta = 0\} = 1] \end{aligned}$$

und a fortiori die Eigenschaften (E 1) und (E 1′). ▮

Beweis zu Satz 3

Für diesen Beweis wiederholen wir kurz die Konstruktion des EQT-Modells aus I: Ist A^α eine beliebige Observable mit der A-feineren ZdE α, $1 = \sum_{i \in K_\alpha} Q_i$, so läßt sich der Operator A auf genau eine Weise in der Form $A = \sum_{i \in K_\alpha} \varphi_A(i)\, Q_i$ darstellen und die Zuordnung $A^\alpha \leftrightarrow \varphi_A$ ist eineindeutig. Den in Axiom (1) geforderten Meßraum definieren wir als das Produkt[17]

$$(\Omega, \mathscr{L}) := \bigotimes_{\alpha \in \Lambda} \mathscr{E}_\alpha := \bigotimes_{\alpha \in \Lambda} (K_\alpha, \mathscr{P}(K_\alpha)) , \tag{20}$$

wobei $\mathscr{P}(K_\alpha)$ die Potenzmenge der Indexmenge $K_\alpha \subset \mathbf{N}$ bedeutet. Ω besteht demnach aus allen Abbildungen $x \colon \Lambda \to \mathbf{N}$ mit der Eigenschaft $x(\alpha) \in K_\alpha$.

Die Abbildungen ${}^0A^\alpha \colon \Omega \to \mathbf{a}$ definieren wir als eindimensionale Zylinderfunktionen

$${}^0A^\alpha(x) := \varphi_A[x(\alpha)] . \tag{21}$$

[17] H. Bauer, Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie, Bd. 1, Springer, Berlin 1964.

Die auf K_α erklärte Funktion $\tilde{m}_W^\alpha(i) = \mathrm{Sp}(W Q_i)$ induziert eindeutig eine Wahrscheinlichkeit m_W^α auf $\mathscr{E}_\alpha := (K_\alpha, \mathscr{P}(K_\alpha))$, und mit Hilfe dieser Wahrscheinlichkeiten definieren wir die geforderten Maße μ_W^ε auf $(\Omega, \mathscr{L})$ durch

$$\mu_W^\alpha := \bigotimes_{\alpha \in \Lambda} m_W^\alpha . \tag{22}$$

Beweis zu Satz 3a

In Satz 2 wurde bereits gezeigt, daß die Axiome (1) und (2) in dem oben definierten Modell erfüllt sind. Wir betrachten nun einen beliebigen Makrozustand U^δ und n Zustandseigenschaften $P_1^{\alpha_1}, \ldots, P_n^{\alpha_n}$ mit verschiedenen ZdE und der Eigenschaft

$$\prod_{i=1}^{n} \mathrm{Sp}(U P_i) \neq 0 .$$

Aus den Gln. (20) bis (22) folgt dann unmittelbar

$$\mu_U^\delta \left(\bigcap_{i=1}^{n} M_{P_i}^{\alpha_i} \right) = \prod_{i=1}^{n} \mu_U^\delta \left(M_{P_i}^{\alpha_i} \right) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Sp}(U P_i) > 0 .$$

Damit ist Eigenschaft (E2) in unserem Modell nachgewiesen und aus Lemma 2 folgt das gleiche für die Eigenschaften (E4) und (E5). Die Gültigkeit von (E3) erkennt man unmittelbar aus den Gln. (20) und (21).

Beweis zu Satz 3b

Um Satz 3b zu beweisen, brauchen wir — nach dem Beweis von Satz 3a — nur noch zu zeigen, daß im Fall dim $\mathbf{H} = 2$ auch die Eigenschaften (E1) und (E6) in unserem Modell gelten. Ist $P \leqq Q$, so liegt bei dim $\mathbf{H} = 2$ genau eine der folgenden vier Möglichkeiten vor: $P = Q$ oder $P = 0 \wedge \mathrm{Sp}(Q) = 1$ oder $P = 0 \wedge Q = 1$ oder $\mathrm{Sp}(P) = 1 \wedge Q = 1$. In allen vier Fällen gilt nun trivialerweise $(\tilde{\forall}\ \alpha, \beta)$ $M_P^\alpha \subseteqq M_Q^\beta$ und a fortiori ist Eigenschaft (E1) erfüllt.

Wir betrachten zwei beliebige Mengen $A, B \in \mathscr{B}$ mit $A \cap B = \emptyset$ und $(\exists\, U^\delta)\ \mu_U^\delta(A \cup B) > 0$; ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir im folgenden $A, B \neq \emptyset$ voraussetzen. Wegen dim $\mathbf{H} = 2$ lassen sich A und B in der Form

$$\left.\begin{aligned} A &= \left(\mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{m} M_{P_i}^{\alpha_i} \right) \times \left(\mathop{\mathsf{X}}_{\substack{\gamma \in \Lambda \\ \gamma \neq \alpha_i}} K_\gamma \right), \\ B &= \left(\mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{n} M_{Q_i}^{\beta_i} \right) \times \left(\mathop{\mathsf{X}}_{\substack{\gamma \in \Lambda \\ \gamma \neq \beta_i}} K_\gamma \right) \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

darstellen mit

$\mathrm{Sp}(P_i) = \mathrm{Sp}(Q_i) = 1$, $\quad i \neq j \Leftrightarrow \alpha_i \neq \alpha_j$, $\quad \beta_i \neq \beta_j$, $K_\gamma = \{1, 2\}$ für alle (von der trivialen ZdE verschiedenen) $\gamma \in \Lambda$ und $M_{P_i}^{\alpha_i}, M_{P_i}^{\beta_i} = \{1\}$ oder $\{2\}$.

Aus $A \cap B = \emptyset$ und $A, B \neq \emptyset$ folgt die Existenz einer ZdE τ, $1 = R + (1 - R)$, mit der Eigenschaft, daß M_R^τ als Faktor in A und M_{1-R}^τ als Faktor in B auftreten. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $\alpha_1 = \beta_1 = \tau$ annehmen; damit ergibt sich

$$A = M_R^\tau \times \left(\mathop{\mathsf{X}}_{i=2}^{m} M_{P_i}^{\alpha_i} \right) \times \left(\mathop{\mathsf{X}}_{\substack{\gamma \in \Lambda \\ \gamma \neq \alpha_i}} K_\gamma \right),$$

$$B = M_{1-R}^\tau \times \left(\mathop{\mathsf{X}}_{i=2}^{n} M_{Q_i}^{\beta_i} \right) \times \left(\mathop{\mathsf{X}}_{\substack{\gamma \in \Lambda \\ \gamma \neq \beta_i}} K_\gamma \right).$$

Wegen $\mathrm{Sp}(R) = 1$ ist R auch ein Makrozustand und wir erhalten

$$\mu_R^\tau(A) = \mathrm{Sp}(R) \prod_{i=2}^{m} \mathrm{Sp}(R P_i) = \prod_{i=2}^{m} \mathrm{Sp}(R P_i) ,$$

$$\mu_R^\tau(B) = \mathrm{Sp}[R(1 - R)] \prod_{i=2}^{n} \mathrm{Sp}(R Q_i) = 0 . \tag{24}$$

Aus dim $\mathbf{H} = 2$ und $i \neq j \Leftrightarrow \alpha_i \neq \alpha_j$ ergibt sich

$$(\forall\, i \neq j, 1 \leqq i, j \leqq m)\ \ 0 < P_i P_j < 1$$

und mit $R = P_1$ folgt daraus

$$0 < \mu_R^\tau(A) \neq \mu_R^\tau(B) = 0 .$$

Damit ist auch Eigenschaft (E6) nachgewiesen.

Beweis zu Satz 3c

Um die Verträglichkeit der in Satz 3c angegebenen dreißig Eigenschaftskombinationen nachzuweisen, müssen wir zu jeder Kombination ein eigenes Modell konstruieren. Da die explizite Konstruktion dieser dreißig Modelle aber unnötig viele Wiederholungen enthalten und zu viel Platz benötigen würde, geben wir im folgenden zu jeder der vier *Kombinationen-Klassen* (c1) bis (c4) ein *Grundmodell* an und zeigen, durch welche Änderungen sich die übrigen Modelle einer Klasse aus dem zugehörigen Grundmodell ableiten lassen.

Klasse (c1)

Als Grundmodell der Klasse (c1) nehmen wir das bisher betrachtete Modell aus Satz 3a. Wie wir in Satz 3a und den Lemmata 2 und 3 gezeigt haben, genügt dieses Modell den Axiomen (1) und (2) und besitzt die Eigenschaften (E2) bis (E5), $\neg$ (E1) und $\neg$ (E6). Wenn wir angeben, wie sich Axiom (2) und (E3) unabhängig voneinander und von den übrigen Eigenschaften verletzen lassen, haben wir damit bereits die vier Modelle der Klasse (c1) konstruiert.

(I) Um Axiom (2) zu verletzen, genügt es, ein einziges Maß geeignet abzuändern. Dazu wählen wir eine ZdE β, $1 = \sum_{i \in K_\beta} Q_i$ mit $2 \leqq Z_\beta := |K_\beta| < \infty$ und einen Makrozustand U^δ mit $\mathrm{Sp}(U Q_1) \neq Z_\beta^{-1}$. Die auf K_β erklärte Funktion $\tilde{d}(i) = Z_\beta^{-1}$ induziert ein Maß d^β auf $\mathscr{E}_\beta = (K_\beta, \mathscr{P}(K_\beta))$ mit der Eigenschaft

$$d^\beta(\{1\}) \neq \mathrm{Sp}(U Q_1)\,. \tag{25}$$

Wir definieren nun das Maß μ_{U}^δ als einziges Maß abweichend von Gl. (22) durch den Ausdruck[17]

$$\mu_{\mathrm{U}}^\delta := d^\beta \otimes \Big(\bigotimes_{\substack{\alpha \in \Lambda \\ \alpha \neq \beta}} m_{\mathrm{U}}^\alpha\Big)\,.$$

Aus Gl. (25) ergibt sich dann $\mu_{\mathrm{U}}^\delta(M_{Q_1}^\beta) \neq \mathrm{Sp}\,(U Q_1)$ und Axiom (2) ist verletzt.

(II) Um (E3) zu verletzen, lassen wir einfach einen bestimmten Punkt x_0 (oder allgemeiner abzählbar viele Punkte) aus Ω weg. Trivialerweise berührt die Änderung

$$(\Omega, \mathscr{L}) \to (\Omega', \mathscr{L}') := (\Omega \backslash x_0, \{M \cap \Omega', M \in \mathscr{L}\})$$

des Meßraums keine der übrigen Folgerungen.

Wie man sich leicht überlegt, lassen sich die Änderungen (I) und (II) unabhängig voneinander vornehmen ohne die übrigen Eigenschaften des Modells zu beeinträchtigen.

Klasse (c2)

Als Grundmodell der Klasse (c2) nehmen wir wieder das Modell aus Satz 3a, allerdings mit folgender Änderung:

(III) Wir wählen einen beliebigen Makrozustand V^γ und zwei ZdE $\tau_1 \neq \tau_2$ $(\tau_1, \tau_2 \neq \beta)$ mit den Eigenschaften[18]

$$K_{\tau_1} = K_{\tau_2} = \{1, \ldots, N_0\}, \quad \prod_{i=1}^{N_0} \mathrm{Sp}(V P_i^{(\tau_1)})\, \mathrm{Sp}(V P_i^{(\tau_2)}) > 0\,. \tag{26}$$

Die auf $K_{\tau_1} \times K_{\tau_2}$ erklärte Funktion

$$\tilde{q}_{\mathrm{V}}(i, j) = \begin{cases} \mathrm{Sp}(V P_i^{(\tau_1)})\, \mathrm{Sp}(V P_j^{(\tau_2)}) + \dfrac{1}{N_0 - 1}\, \mathrm{Sp}(V P_k^{(\tau_1)})\, \mathrm{Sp}(V P_k^{(\tau_2)}) & \text{für} \quad i \neq j \\ \mathrm{Sp}(V P_i^{(\tau_1)})\, \mathrm{Sp}(V P_i^{(\tau_2)}) - \mathrm{Sp}(V P_k^{(\tau_1)})\, \mathrm{Sp}(V P_k^{(\tau_2)}) & \text{für} \quad i = j \end{cases}$$

mit

$$\mathrm{Sp}(V P_k^{(\tau_1)})\, \mathrm{Sp}(V P_k^{(\tau_2)}) = \min_i \,[\mathrm{Sp}(V P_i^{(\tau_1)})\, \mathrm{Sp}(V P_i^{(\tau_2)})]$$

induziert auf $\mathscr{E}_{\tau_1} \otimes \mathscr{E}_{\tau_2}$ eindeutig eine Wahrscheinlichkeit q_{V} mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} q_{\mathrm{V}}(\{k\} \times \{k\}) &= 0\,, \\ q_{\mathrm{V}}(\{i\} \times K) &= \mathrm{Sp}(V P_i^{\tau_1})\,, \\ q_{\mathrm{V}}(K \times \{j\}) &= \mathrm{Sp}(V P_j^{\tau_2})\,. \end{aligned} \tag{27}$$

Wir definieren nun das Maß μ_{V}^γ auf $(\Omega, \mathscr{L})$ abweichend von Gl. (22) durch

$$\mu_{\mathrm{V}}^\gamma := q_{\mathrm{V}} \otimes \bigotimes_{\substack{\alpha \in \Lambda \\ \alpha \neq \tau_1, \tau_2}} m_{\mathrm{V}}^\gamma\,; \tag{28}$$

nach Konstruktion hat es die Eigenschaften

$$\int_\Omega {}^0A^\alpha \,\mathrm{d}\mu_{\mathrm{V}}^\gamma = \mathrm{Sp}(A\, V)\,, \quad \mu_{\mathrm{V}}^\gamma(M_k^{\tau_1} \cap M_k^{\tau_2}) = 0\,.$$

Damit haben wir das zweite Grundmodell mit den Eigenschaften Axiom (1), Axiom (2), $\neg$(E1), $\neg$(E2), $\neg$(E6) und (E3) bis (E5) konstruiert. An diesem Modell lassen sich nun die Eigenschaften (E3) bis (E5) und Axiom (2) unabhängig voneinander aufheben:

Axiom (2) und (E3) zerstören wir wie oben durch die Anweisungen (I) und (II).

(IV) Um (E4) zu verletzen, müssen wir alle Maße so umdefinieren, daß für mindestens eine Menge $Y \in \mathscr{B}$, $Y \neq \emptyset$ gilt

$$(\forall\, W^\varepsilon)\, \mu_{\mathrm{W}}^\varepsilon(Y) = 0\,.$$

Dazu wählen wir drei spezielle verschiedene ZdE $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ mit den Eigenschaften

$$\begin{gathered} K_{\sigma_1} = K_{\sigma_2} = K_{\sigma_3} = \{1, 2, 3\} \\ P_2^{(\sigma_2)} = P_2^{(\sigma_1)}\,, \quad P_3^{(\sigma_3)} = P_3^{(\sigma_1)}\,, \quad \sigma_i \neq \beta, \tau_j \end{gathered} \tag{29}$$

und definieren $Y := M_1^{\sigma_1} \cap M_2^{\sigma_2} \cap M_3^{\sigma_3}$. Aus (29) folgt

$$(\forall\, W^\varepsilon) \sum_{i=1}^{3} \mathrm{Sp}(W P_i^{(\sigma_1)}) = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{Sp}(W P_i^{(\sigma_i)}) = 1\,.$$

[18] Um die Elemente verschiedener ZdE unterscheiden zu können, schreiben wir im folgenden $1 = \sum_{i \in K_\alpha} P_i^{(\alpha)}$ für die ZdE α. Die Mengen $M_{P_n^{(\alpha)}}^\alpha$ bezeichnen wir auch mit M_n^α.

Sei nun W^ε ein beliebiger Makrozustand; dann definieren wir auf $K_{\sigma_1} \times K_{\sigma_2} \times K_{\sigma_3}$ eine Funktion $\tilde{e}_W$ durch die Vorschrift:

a) Für $\prod_{i=1}^{3} \mathrm{Sp}(W P_i^{(\sigma_1)}) = 0$ sei $\tilde{e}_W = \prod_{i=1}^{3} \tilde{m}_W^{\sigma_i}$.

b) Im Fall $\prod_{i=1}^{3} \mathrm{Sp}(W P_i^{(\sigma_1)}) > 0$ können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen

$$0 < \mathrm{Sp}(W P_1^{(\sigma_1)}) \leqq \mathrm{Sp}(W P_2^{(\sigma_1)}) \leqq \mathrm{Sp}(W P_3^{(\sigma_1)});$$

daraus folgt $\mathrm{Sp}\,(W P_1^{(\sigma_1)}) \leqq \frac{1}{3}$ und $\mathrm{Sp}\,(W P_2^{(\sigma_1)}) \leqq \frac{1}{2}$ und auf $K_{\sigma_1} \times K_{\sigma_2}$ existiert daher eine Funktion $\tilde{f}_W$ mit den Eigenschaften

$$\tilde{f}_W(1,2) = 0\,, \quad \tilde{f}_W(i,j) \geqq 0\,,$$

$$\sum_{i=1}^{3} \tilde{f}_W(i,j) = \mathrm{Sp}(W P_j^{\sigma_2})\,, \quad \sum_{j=1}^{3} \tilde{f}_W(i,j) = \mathrm{Sp}(W P_i^{\sigma_1})\,.$$

Im Fall (b) definieren wir nun $\tilde{e}_W := \tilde{f}_W \tilde{m}_W^{\sigma_3}$.

Man prüft leicht nach, daß die Funktion $\tilde{e}_W$ ein normiertes Maß e_W auf $\mathscr{E}_{\sigma_1} \otimes \mathscr{E}_{\sigma_2} \otimes \mathscr{E}_{\sigma_3}$ induziert, und mit Hilfe dieses Maßes definieren wir dann die Wahrscheinlichkeiten μ_W^ε auf $(\Omega, \mathscr{L})$ durch

$$\mu_W^\varepsilon := e_W \otimes \bigotimes_{\substack{\alpha \in \Lambda \\ \alpha \neq \sigma_i}} m_W^\alpha\,. \tag{30}$$

Die so modifizierten Maße haben nach Konstruktion die Eigenschaften

$$(\tilde{\forall} \alpha)\,(\forall k) \quad \mu_W^\varepsilon(M_k^\alpha) = \mathrm{Sp}(W P_k^{(\alpha)})\,,$$
$$\mu_W^\varepsilon(M_1^{\sigma_1} \cap M_2^{\sigma_2} \cap M_3^{\sigma_3}) = \mu_W^\varepsilon(Y) = 0$$

und damit ist (E4) zerstört.

(V) Um (E5) zu verletzen, ändern wir das Maß eines beliebig herausgegriffenen extrem unscharfen Makrozustands $\hat{T}^\delta$ folgendermaßen ab: Wir wählen zwei weitere ZdE $\tau_3, \tau_4 \neq \tau_1, \tau_2, \sigma_i, \beta$ mit $K_{\tau_3} = K_{\tau_4} = \{1, \ldots, N_0\}$ und definieren auf $\mathscr{E}_{\tau_3} \otimes \mathscr{E}_{\tau_4}$ das Maß $q_{\hat{T}}$ wie in (III). Entsprechend definieren wir

$$\mu_{\hat{T}}^\delta := q_{\hat{T}} \otimes \bigotimes_{\substack{\alpha \in \Lambda \\ \alpha \neq \tau_3, \tau_4}} m_{\hat{T}}^\alpha\,. \tag{31}$$

Nach Konstruktion hat dieses Maß die Eigenschaften

$$(\forall A^\alpha) \int_\Omega {}^0A^\alpha \,\mathrm{d}\mu_{\hat{T}}^\delta = \mathrm{Sp}(A\,T)\,, \quad \mu_{\hat{T}}^\delta(M_{k'}^{\tau_3} \cap M_{k'}^{\tau_4}) = 0\,,$$

wodurch (E5) verletzt wird.

Man überzeugt sich leicht davon, daß keine der Änderungen (I), (II), (IV) und (V) die übrigen Eigenschaften des (c2)-Grundmodells beeinträchtigt und daß diese Änderungen (durch geeignete Multiplikation der speziellen Randmaße d, e und q) in beliebiger Zusammenstellung vorgenommen werden können. Damit haben wir alle sechzehn Modelle der Klasse (c2) konstruiert.

Klasse (c3)

Zur Konstruktion des Grundmodells der Klasse (c3) verwenden wir wieder den Meßraum $(\Omega, \mathscr{L})$ und die Funktionen ${}^0A^\alpha$. Auf K_γ definieren wir die Funktion $\tilde{h}^\gamma(i) := 2^{-i}(1 - 2^{-|K_\gamma|})^{-1}$

und auf $\bigtimes_{j=1}^{n} K_{\alpha_j}$ die Funktionen

$$\tilde{k}\left[\begin{smallmatrix}\alpha_1 \ldots \alpha_n \\ r_1 \ldots r_n\end{smallmatrix}\right](i_1, \ldots, i_n) := \prod_{j=1}^{n} \delta_{r_j i_j}\,.$$

Diesen Funktionen entsprechen die Wahrscheinlichkeiten h^γ und $k\left[\begin{smallmatrix}\alpha_1 \ldots \alpha_n \\ r_1 \ldots r_n\end{smallmatrix}\right]$ auf $\mathscr{E}_\gamma$ bzw. $\bigotimes_{j=1}^{n} \mathscr{E}_{\alpha_j}$. Auf $(\Omega, \mathscr{L})$ definieren wir dann die Wahrscheinlichkeiten

$$\nu\left[\begin{smallmatrix}\alpha_1 \ldots \alpha_n \\ r_1 \ldots r_n\end{smallmatrix}\right] := \left(\tfrac{1}{3} \bigotimes_{i=1}^{n} h^{\alpha_i} + \tfrac{2}{3}\, k\left[\begin{smallmatrix}\alpha_1 \ldots \alpha_n \\ r_1 \ldots r_n\end{smallmatrix}\right]\right) \otimes \bigotimes_{\substack{\gamma \in \Lambda \\ \gamma \neq \alpha_i}} h^\gamma\,. \tag{32}$$

Zu jeder vorgegebenen Menge $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ von ZdE gibt es abzählbar viele verschiedene Maße $\nu[:::]$; folglich gibt es (wegen $|\Lambda| \geqq \mathfrak{c}$) insgesamt maximal $|\Lambda|^{|\mathbb{N}|} = |\Lambda|$ Maße $\nu[:::]$ und die Anzahl dieser Maße ist höchstens gleich der Anzahl der Makrozustände der EQT. Es existiert daher eine surjektive Abbildung ℓ der Menge aller Makrozustände auf die Menge alle Maße ν. Mit Hilfe dieser Abbildung definieren wir die Wahrscheinlichkeiten μ_W^ε des (c3)-Grundmodells:

$$\mu_W^\varepsilon := \ell(W^\varepsilon) = \nu[:::]\,. \tag{33}$$

Das durch die Gln. (20), (21) und (33) definierte Modell besitzt offensichtlich die Eigenschaften $\neg$ (E1) und (E2) bis (E5) und verletzt Axiom (2).

Wir betrachten nun zwei beliebige Mengen D_1, D_2 aus $\mathscr{B}$ mit $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, $(\exists\, U^\delta)\; \mu_U^\delta(D_1 \cup D_2) > 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $D_1 \neq \emptyset$ annehmen; dann existiert eine Menge $M_0 = \bigcap_{i=1}^{n} M_{b_i}^{\beta_i} \subset D_1$ und aus Gl. (32) folgt $\nu\left[\begin{smallmatrix}\beta_1 \ldots \beta_n \\ b_1 \ldots b_n\end{smallmatrix}\right](M_0) > \frac{2}{3}$. Ist $S^\varepsilon \in \ell^{-1}\left(\nu\left[\begin{smallmatrix}\beta_1 \ldots \beta_n \\ b_1 \ldots b_n\end{smallmatrix}\right]\right)$, so ergibt sich aus $M_0 \subset D_1$ und $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ unmittelbar

$$\mu_S^\varepsilon(D_1) \geqq \mu_S^\varepsilon(M_0) > \tfrac{2}{3}\,, \qquad \mu_S^\varepsilon(D_2) \leqq \mu_S^\varepsilon(\Omega \backslash D_1) < \tfrac{1}{3}$$

und Eigenschaft (E6) ist erfüllt. Damit haben wir das Grundmodell der Klasse (c3) mit den Eigenschaften $\neg$ Axiom (2), $\neg$ (E1) und (E2) bis (E6) konstruiert. Offenbar können wir (E3) unabhängig von den übrigen Eigenschaften durch Anweisung (II) verletzen, wodurch sich auch das zweite Modell der Klasse (c3) ergibt.

Klasse (c4)

Ändert man das (c3)-Grundmodell nach Anweisung (III) ab, so ergibt sich ein Modell mit den Eigenschaften $\neg$ Axiom (2), $\neg$ (E1), $\neg$ (E2) und (E3) bis (E6). Dieses Modell wählen wir als Grundmodell der Klasse (c4). An diesem Modell lassen sich die Eigenschaften (E3) und (E5) durch die Anweisungen (II) und (V) zerstören.

(VI) Um (E4) zu verletzen, müssen wir alle Maße des (c4)-Modells geeignet modifizieren. Dazu wählen wir eine ZdE $\lambda \neq \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \beta$ und definieren auf K_λ die Funktion

$$\tilde{p}(i) = 2^{1-i}(1 - 2^{1-|K_\lambda|})^{-1}(1 - \delta_{1i}),$$

die ihrerseits die Wahrscheinlichkeit p^λ mit der Eigenschaft $p^\lambda(\{1\}) = 0$ auf $\mathscr{E}_\lambda$ induziert. Dann ordnen wir jedem Maß $\nu\,[\vdots\,\vdots]$ eindeutig ein neues Maß $\nu'[\vdots\,\vdots]$ zu durch die Vorschrift

$$\begin{aligned}
\nu\left[{}^{\alpha_1\ldots\alpha_n}_{r_1\ldots r_n}\right] \to \nu'\left[{}^{\alpha_1\ldots\alpha_n}_{r_1\ldots r_n}\right] :&= \\
&= \left[\tfrac{1}{3}\bigotimes_{i=1}^{n} h^{\alpha_i} + \tfrac{2}{3}\,k\left[{}^{\alpha_1\ldots\alpha_n}_{r_1\ldots r_n}\right]\right] \otimes p^\lambda \otimes \bigotimes_{\substack{\gamma\in\Lambda \\ \gamma\neq\alpha_i,\lambda}} h^\gamma \\
&\qquad \text{für} \quad \lambda \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}, \\
&= \left[\tfrac{1}{3}\Big(p^\lambda \otimes \bigotimes_{\substack{i=1 \\ \alpha_i\neq\lambda}}^{n} h^{\alpha_i}\Big) + \tfrac{2}{3}\,k\left[{}^{\alpha_1\ldots\alpha_n}_{r_1\ldots r_n}\right]\right] \otimes \bigotimes_{\substack{\gamma\in\Lambda \\ \gamma\neq\alpha_i}} h^\gamma \qquad (34) \\
&\qquad \text{für} \quad \lambda \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \quad \text{aber} \quad \left[{}^{\lambda}_{1}\right] \notin \left[{}^{\alpha_1\ldots\alpha_n}_{r_1\ldots r_n}\right], \\
&= p^\lambda \otimes \bigotimes_{\substack{\gamma\in\Lambda \\ \gamma\neq\lambda}} h^\gamma \qquad \text{für } \left[{}^{\lambda}_{1}\right] \in \left[{}^{\alpha_1\ldots\alpha_n}_{r_1\ldots r_n}\right].
\end{aligned}$$

Entsprechend modifizieren wir die (maximal zwei) in den (c4)-Modellen auftretenden „Ausnahmemaße" $\mu_{\mathrm{V}}^{\gamma}$ bzw. $\mu_{\hat{\mathrm{T}}}^{\varepsilon}$ aus (III) und (V): Wegen $\lambda \neq \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ baruchen wir in den Definitionen (28) und (31) nur den Faktor m_{V}^{λ} bzw. $m_{\hat{\mathrm{T}}}^{\lambda}$ durch p^λ zu ersetzen. Dann erhalten wir für alle Maße in (VI)

$$(\forall\, W^\varepsilon) \quad \mu_{\mathrm{W}}^{\varepsilon}(M_1^\lambda) = 0 \text{ und (E4) ist verletzt.}$$

Wie man sich leicht klarmacht, beeinflußt keine der Änderungen (II), (V) und (VI) die jeweils übrigen Eigenschaften des (c4)-Modells. Damit haben wir auch die acht Modelle der Klasse (c4) konstruiert und Satz 3 ist vollständig bewiesen. ▌

Beweis zu Satz 4

Liegen die Operatoren P_ξ, P_ζ, P_η und $P_\zeta \sqcup P_\eta$ in Σ, so folgt aus Annahme (C3)

$$P_\xi P_\zeta = 0 \Rightarrow M_\xi \cap M_\zeta = \emptyset,$$

$$(P_\xi P_\zeta = 0) \wedge (P_\eta < P_\xi + P_\zeta) \Rightarrow M_\eta \subset (M_\xi \cup M_\zeta). \qquad (35)$$

In $\mathbf{H}$ definieren wir die Elemente

$$\begin{aligned}
&\varrho = \varphi_1 + a\,\varphi_2, \quad \psi_1 = \varphi_1 + a\,\varphi_2 + (a/b)\,\varphi_3, \qquad (36) \\
&\psi_2 = -a\,\varphi_2 + a\,b\,\varphi_3, \quad \psi_3 = \varphi_1 + (a\,b + (a/b))\,\varphi_3,
\end{aligned}$$

mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned}
&\langle\varrho\,|\,\varphi_3\rangle = 0, \quad \psi_1 = \varrho + (a/b)\,\varphi_3, \\
&\langle\psi_1\,|\,\psi_2\rangle = 0 \quad \text{und} \quad \psi_3 = \psi_1 + \psi_2. \qquad (37)
\end{aligned}$$

Für a, b, ab, a/b aus A_4 liegen die Operatoren P_ϱ und P_{ψ_i} in Σ, und aus (A2) und den Gln. (35) bis (37) folgen die Relationen

$$\begin{aligned}
&M_{\varphi_1} \cap M_{\varphi_2} \cap M_{\varphi_3} = \emptyset, \\
&M_{\psi_1} \subset M_\varrho \cup M_{\varphi_3}, \qquad (38) \\
&M_{\psi_2} \subset M_{\varphi_2} \cup M_{\varphi_3}, \\
&M_{\psi_3} \subset M_{\psi_1} \cup M_{\psi_2}.
\end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Menge $X := M_{\varphi_1} \cap \overline{M_\varrho}$. Aus den Relationen (38) folgt unmittelbar

$$\begin{aligned}
M_{\psi_3} \subset (M_{\psi_1} \cup M_{\psi_2}) &\subset (M_\varrho \cup M_{\varphi_2} \cup M_{\varphi_3}) \\
&\subset M_\varrho \cup \overline{M_{\varphi_1}} = \overline{X}. \qquad (39)
\end{aligned}$$

Setzen wir $a = rs(r^2 + s^2)^{-1}$, $b = \pm\, r/s$ und speziell $r = 1$, $s = 2$, so liegen alle Koeffizienten der Linearkombinationen aus (36) in A und es gilt $(a\,b + a/b) = \pm\,1$.

Mit $\psi_3' = \varphi_1 + \varphi_2$, $\psi_3'' = \varphi_1 - \varphi_2$ erhalten wir aus Gl. (39)

$$M_{\psi_3'} \cup M_{\psi_3''} \subset \overline{X}. \qquad (40)$$

Mit $\varphi_1 = \frac{1}{2}(\psi_3' + \psi_3'')$ und $\langle\psi_3'\,|\,\psi_3''\rangle = 0$ ergibt sich aus (35) und (40)

$$M_{\varphi_1} \subset (M_{\psi_3'} \cup M_{\psi_3''}) \subset \bar{X}. \qquad (41)$$

Aus Gl. (41) und der Definition von X folgt schließlich

$$X = \emptyset \quad \text{oder} \quad M_{\varphi_1} \subset M_\varrho. \qquad (42)$$

Daraus ergibt sich

$$(\forall\, W \in \Theta) \quad \mu_{\mathrm{W}}(M_{\varphi_1}) \leqq \mu_{\mathrm{W}}(M_\varrho). \qquad (43)$$

Nach Gl. (43) und Annahme (B2) gilt insbesondere

$$\mu_{P\varphi_1}(M_{\varphi_1}) \leqq \mu_{P\varphi_1}(M_\varrho).$$

Diese Gleichung widerspricht aber Annahme (D), nach der die linke Seite gleich eins und die rechte Seite kleiner als eins ist. ▌

Herrn Prof. Dr. G. Süssmann danke ich für sein lebhaftes Interesse an dieser Arbeit und für viele wertvolle Diskussionen. Die Arbeit wurde in dankenswerter Weise von der Deutschen Forschungsgemeinschaft unterstützt.